תורת הקבוצות, תרגיל 13

בתרגיל זה מותר להסתמך על אקסיומת הבחירה.

1. א. תהא A קבוצת כל יחסי הסדר החלקיים על קבוצת המספרים הטבעיים N. מהי $|A|$?
ב. תהא B קבוצת כל יחסי הסדר הטוב על N. מהי $|B|$?

2. האם קיימת משפחה F של קבוצות של מספרים ממשיים כך שמתקיימות התכונות הבאות:
א. לכל $A \in F$ מתקיים $|A| < |R|$.
ב. לכל $A, B \in F$ מתקיים $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$.
ג. איחוד כל הקבוצות ב- F הוא R כולו?
רמז: השתמש בסודר-מונה של R, כלומר בסודר α המזערי שהו שווה עוצמה ל-R.

3. נתבונן בהכללה הבאה של משפט קנטור המכונה משפט צרמלו - קניג:

משפט: לכל קבוצת אינדקסים Γ, אם עבור שתי משפחות של עוצמות $\{\alpha_i\}_{i\in\Gamma}$ ו- $\{\beta_i\}_{i\in\Gamma}$ מתקיים $\alpha_i < \beta_i$ לכל $i \in \Gamma$ אזי מתקיים $\Sigma_{i\in\Gamma}\alpha_i < \Pi_{i\in\Gamma}\beta_i$.

בניגוד למשפט קנטור שנכון גם ללא הנחת אקסיומת הבחירה, משפט זה הינו שקול לאקסיומת הבחירה.

א. הוכח כי משפט קנטור נובע ממשפט צרמלו - קניג.
תזכורת: משפט קנטור אומר שלכל קבוצה X מתקיים $|X| < 2^{|X|}$.

ב. הוכח כי אקסיומת הבחירה נובעת ממשפט צרמלו - קניג.
מכיוון שהגדרת הסכום והמכפלה האינסופיים של עוצמות דורשת את אקסיומת הבחירה לצורך ההוכחה שהן מוגדרות היטב, השתמש כאן בנוסח הבא של משפט צרמלו קניג, המשתמש בקבוצות במקום עוצמות: תהי Γ קבוצת אינדקסים , תהי $\{A_i\}_{i\in\Gamma}$ משפחה של קבוצות זרות זו לזו, ותהי $\{B_i\}_{i\in\Gamma}$ משפחה של קבוצות. אם לכל $i \in \Gamma$ מתקיים שעוצמת A_i קטנה מעוצמת B_i אז עוצמת $\bigcup_{i\in\Gamma} A_i$ קטנה מעוצמת $\times_{i\in\Gamma}B_i$, היכן ש- $\times_{i\in\Gamma}B_i$ היא קבוצת כל הפונקציות f שתחומן Γ כך שלכל $i \in \Gamma$ $f(i) \in B_i$.
(רמז: אחד הניסוחים של אקסיומת הבחירה נובע מהמשפט באופן מיידי).

4. השערת הרצף אומרת שמתקיים $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. בלי להניח את השערת הרצף איננו יודעים מהו מקומו של $2^{\aleph_0}$ בסדרת האלפים. בשאלה זו נוכיח שלא ייתכן $\aleph_\omega = 2^{\aleph_0}$. כזכור, $\aleph_\omega$ הוא האלף הראשון שהוא גדול יותר מ- $\aleph_n$ לכל $n \in N$.
א. הוכח כי מתקיים $\Sigma_{n\in N}\aleph_n = \aleph_\omega$.
ב. השתמש במשפט צרמלו - קניג כדי להסיק ש- $\aleph_\omega < (\aleph_\omega)^{\aleph_0}$.
ג. הסק מכאן שלא יתכן $2^{\aleph_0} = \aleph_\omega$.

תאריך ההגשה: 15.6.2005